Summer Camp of 57 School

Victor Alekseevich Kleptsyn

6th of August 2013

Self-avoiding walks

Выберем и зафиксируем решётку L — одну из трёх решёток: треугольную, квадратную или шестиугольную. Пусть c_n — число путей без возвращения длины n на L.

Problem 1. Докажите, что $c_{m+n} \leq c_m c_n$.

Problem 2. Фиксируем произвольное k. Докажите, что найдётся такая константа $C = C(k)$, что для всех n выполнено $c_n \leq C(\sqrt[k]{c_k})^n$.

Hint. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Problem 3. Фиксируем произвольное k. Докажите, что найдётся такая константа $C = C(k)$, что для всех n выполнено $\sqrt[n]{c_n} \leq \sqrt[n]{C}\sqrt[k]{c_k}$. Если вы знаете, что такое предел, выведите отсюда, что предел $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{c_n}$ существует.

Hint. Воспользуйтесь предыдущей задачей.

Problem 4. Рассмотрим все возможные пути без возвращения длины n на нашей решётке, начинающиеся в начале координат. Сформулируйте в терминах последовательности c_n ответ на следующий вопрос: чему равна вероятность p_n того, что два случайно выбранных таких пути не имеют других общих точек, кроме начала координат?

Hint. Подумайте, что можно сказать об объединении таких двух путей.

Problem 5. а) Предположим, что $c_n \sim An^\beta\alpha^n$ (то есть, отношение $\frac{c_n}{An^\beta\alpha^n}$ с ростом n становится всё ближе и ближе к 1). Что можно сказать о том, как себя при больших n ведёт вероятность p_n из предыдущей задачи?

б) **Универсальность**: предполагая, что показатель β от выбора решётки не зависит, покажите, что не зависит от выбора решётки и асимптотическое поведение вероятности p_n.

Problem 6. Дорога по заколдованному королевству проходит через участок на реке, устроенный следующим образом: обычная дорога заканчивается в точке A на одном берегу и вновь продолжается за точкой C на другом. При этом на реке есть два острова, B и D, и построены мосты

AB, BC, AD, DC и BD. У злого волшебника в книге записано заклинание, в результате действия которого каждый мост рушится (независимо от остальных) с вероятностью $1/2$. С какой вероятностью после прочтения этого заклинания с одного берега реки на другой всё ещё можно будет перебраться?

Hint. Можно, конечно, посчитать честно. А можно посмотреть на ситуацию с точки зрения рыбы, которой мосты мешают проплывать: с какой вероятностью она сможет проплыть по реке после того, как заклинание будет прочитано?

К предыдущему разу:

Problem 7. Формула Стирлинга утверждает, что $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$. Воспользовавшись ею, оцените примерное значение C_{2m}^m.