Разбиения, диаграммы Юнга и другие

Задача 1. **a)** Постройте биекцию между множеством самосопряженных разбиений числа n и множеством его разбиений в сумму *различных нечетных* слагаемых.

b) Вычислите производящую функцию для числа самосопряженных разбиений.

Задача 2. Постройте биекцию между множествами разбиений числа n в сумму *различных* слагаемых и в сумму *нечетных* слагаемых.

Задача 3 (Тождества Гаусса). Докажите, что

a)

$$\frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\dots}{(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\dots} = 1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \dots;$$

b)

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots} = 1 + q + q^3 + q^6 + \dots.$$

Задача 4. Докажите, что производящая функция для диаграмм Юнга по полупериметру равна $\frac{q^2}{1-2q}$.

Задача 5. Положим $[n] = 1 + q + \dots + q^{n-1}$, $[n]! = [1] \cdot [2] \cdot \dots \cdot [n]$. Докажите, что

$$\begin{bmatrix} m+n \\ n \end{bmatrix} = \frac{[m+n]!}{[m]![n]!}.$$

Задача 6 (q-бином Ньютона). **a)** Докажите, что

$$(1+x)(1+xq)\dots(1+xq^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k q^{k(k-1)/2}.$$

b) Пусть переменные x и y не коммутируют, но вместо этого удовлетворяют соотношению $yx = qxy$. Докажите, что

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k}.$$

Задача 7. Выведите из теоремы о q-биноме *конечную форму тождества Якоби для тройного произведения*:

$$\prod_{k=1}^{m}(1+xq^k)(1+x^{-1}q^{k-1}) = \sum_{j=-m}^{m} \begin{bmatrix} 2m \\ m+j \end{bmatrix} q^{j(j+1)/2} x^j.$$